

## APPLICATION DE LA METHODE INTEGRALE A L'ETUDE DE LA ZONE D'ETABLISSEMENT D'UN PANACHE THERMIQUE HUMIDE

R. GUILLAUME,\* X. GARONNE\* et G. SALAÜN-PENQUER†

(Reçu le 13 février 1980)

**Résumé**—Le modèle intégral, déjà développé par les auteurs antérieurement [15], a été étendu à l'étude de la zone d'établissement d'un panache. Ce modèle permet de traiter aussi le cas de panaches condensés. Le contrôle de la validité des hypothèses à l'aide des essais expérimentaux de Pryputniewicz [22] s'avère correct. La méthode est ensuite utilisée pour le calcul de panaches condensés avec des conditions météorologiques réelles (cas de John-Amós); le domaine calculé s'arrête légèrement au dessous de la nappe d'étalement.

### NOMENCLATURE

$b$ ,	rayon caractéristique du panache;
$b_n$ ,	rayon caractéristique du noyau;
$b_v$ ,	rayon du panache visible (zone de condensation);
$C_p$ ,	chaleur spécifique de l'air à pression constante;
$C_v$ ,	chaleur spécifique de l'air à volume constant;
$e$ ,	pression partielle de vapeur de l'eau;
$e_w$ ,	pression partielle de vapeur saturante de l'eau;
$f(\eta)$ ,	$= e^{-\eta^2}$ , fonction caractéristique de la répartition radiale des différentes grandeurs;
$J$ ,	variation du flux de quantité de chaleur due au changement d'état;
$L_v$ ,	chaleur latente spécifique de changement d'état eau-vapeur;
$P_1(z)$ ,	$= P_1(z, \infty)$ , pression statique locale;
$R_A$ ,	$= C_p - C_v$ (cas de l'air sec);
$R_v$ ,	(cas de la vapeur d'eau);
$r$ ,	rayon courant;
$T(z, \eta)$ ,	température [K];
$T_m(z)$ ,	$= T(z, 0)$ ;
$T_1(z)$ ,	$= T(z, \infty)$ ;
$u$ ,	composante radiale de la vitesse;
$w_m(z)$ ,	vitesse axiale de référence à l'altitude $z$ ;
$X$ ,	$= X_m f(\eta)$ , forme universelle des profils de vitesse, de température, d'humidité;
$X_m$ ,	valeur axiale de référence à l'altitude $z$ ;
$w$ ,	$= w_m(z) f(\eta)$ , composante axiale de la vitesse;
$z$ ,	altitude;
$\alpha$ ,	coefficient d'entraînement: $u_b(z) = -\alpha w_m(z)$ ;
$\rho$ ,	masse volumique moyenne de l'aérosol;

$\Delta T$ ,	$= T - T_1 = (T_m - T_1) f(\eta)$ ;
$\Delta \rho$ ,	$= \rho_1 - \rho = -(\rho_m - \rho_1) f(\eta)$ ;
$\Delta \tau$ ,	$\tau - \tau_1 = (\tau_m - \tau_1) f(\eta)$ ;
$\eta$ ,	$= \frac{r - b_n}{b - b_n}$ ;
$\rho$ ,	masse volumique de la phase gazeuse de l'air humide;
$\rho_m(z)$ ,	$= \rho(z, 0)$ ;
$\rho_1(z)$ ,	$= \rho(z, \infty)$ ;
$\tau(z, r)$ ,	masse d'eau, à l'état liquide ou vapeur, par unité de masse d'air sec;
$\tau_m(z)$ ,	$= \tau(z, 0)$ ;
$\tau_1(z)$ ,	$= \tau(z, \infty)$ ;
$\tau_c(z)$ ,	rapport de mélange de la phase liquide;
$\tau_s(p, T)$ ,	rapport de mélange saturant de l'air humide.

### Nota

( )<sub>ad</sub> la valeur entre parenthèses correspond à une transformation adiabatique;  
 les grandeurs utilisées sont des grandeurs moyennes dans le temps;  
 le signe prime caractérise la composante de fluctuation de la grandeur qu'il affecte;  
 les produits de corrélation moyennés dans le temps sont surlignés;  
 l'indice 's' se rapporte aux conditions de saturation;  
 l'indice 'r' désigne les conditions à la sortie de la tour.

### INTRODUCTION

LORSQU'UN jet thermique est émis dans l'atmosphère, les grandeurs caractéristiques de l'écoulement au niveau de la section de sortie ne sont pas directement affectées, du moins sur une certaine distance, par les phénomènes de transfert.

Cette distance est différente selon la grandeur considérée, par exemple elle est plus importante pour les termes de corrélation moyennés dans le temps que pour les vitesses [1].

\* I.U.T. d'Aix-en-Provence, Département Génie Mécanique, France.

† Institut de Mécaniques des Fluides de Marseille, Marseille, France.

On distingue habituellement dans la zone d'établissement d'un jet, deux régions (Fig. 1):

- (i) une région initiale dans laquelle l'épaississement de la couche limite de mélange résulte à la fois de l'entraînement du fluide de l'atmosphère environnante et de l'érosion de la partie centrale du jet non encore perturbée;
- (ii) une région transitoire qui débute au niveau où le profil radial initial de la vitesse est entièrement érodé; dans cette région, les différentes grandeurs caractéristiques de la turbulence s'adaptent au seul environnement extérieur.

En général, la longueur de cette dernière région est faible devant celle de la première [2], ce qui permet, pour une première approche, de ne pas la prendre en considération.

L'étude de la zone d'établissement d'un jet\* a déjà fait l'objet d'un grand nombre de publications tant théoriques qu'expérimentales.

Un résumé qui rappelle les résultats antérieurs obtenus par de nombreux auteurs [3-5] peut être trouvé dans l'ouvrage d'Abramovich [6]; la distinction est faite entre les 'jets mécaniques' à quantité de mouvement pur, et ceux soumis à une poussée hydrostatique. De ces différentes études, il résulte que:

- (i) les répartitions radiales de vitesse, de température et de concentration ont une forme qui peut être considérée comme universelle.
- (ii) Il n'y a qu'une échelle de vitesse: la vitesse sur l'axe, et qu'une échelle de longueur: l'épaisseur de la couche de mélange.

Cet acquis permet, à Abramovich, d'utiliser une méthode intégrale pour étudier théoriquement cette zone dans le cas d'un jet mécanique, et d'un jet thermique. Après avoir simplement décrit cette zone, Hinze [2] fait une étude critique de quelques travaux effectués sur ce sujet [7, 8].

Des études expérimentales plus récentes [9, 10], utilisant l'anémométrie à fil chaud, ont affiné nos connaissances de la structure fine de cette zone; en particulier, Davies [9] a mesuré la distribution de l'intensité de turbulence, des produits de corrélation, etc. Ces différents auteurs ont vérifié que:

- (i) dans la couche de mélange, le mouvement était bien à invariance locale.
- (ii) La loi de répartition radiale des grandeurs considérées pouvait être considérée comme universelle; ils ont constaté aussi que l'échelle de la turbulence était une fonction linéairement croissante de la distance à la buse d'émission et que l'échelle

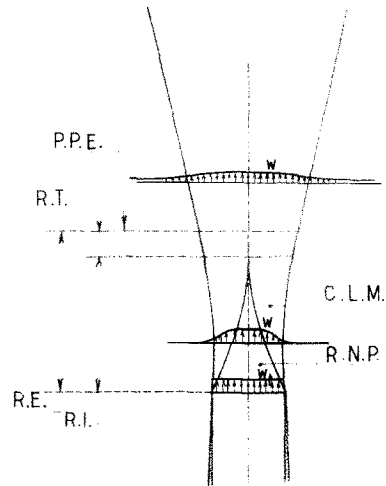


FIG. 1. Représentation schématique de l'écoulement d'un jet thermique R.I.: région initiale; R.E.: région d'établissement; R.T.: région de transition; R.N.P.: région non perturbée; C.L.M.: couche limite de mélange; P.P.E.: panache pleinement établi.

des temps variait en raison inverse de la vitesse axiale.

En 1967, Sami *et al.* [11] confirment les acquis précédents. Ils étudient expérimentalement les différents termes moyens et de fluctuation intervenant dans les équations de quantité de mouvement et d'énergie cinétique du mouvement moyen; il montre que la distribution de l'écart quadratique moyen réduit, de la fluctuation de la pression et celle de l'intensité de turbulence sont semblables.

Enfin, en 1978, Haminh et Chassaing [12] ont fait une étude expérimentale et théorique de la turbulence d'un écoulement, en aval d'une discontinuité d'ordre géométrique. Ils ont utilisé pour traiter théoriquement ce problème une méthode aux différences finies; la fermeture du système est obtenue en utilisant deux modèles de viscosité turbulente établis à partir d'hypothèses portant sur des tensions de Reynolds. L'accord entre les résultats théoriques et expérimentaux s'est révélé correct; ces deux approches montrent que dans la région d'affinité le taux d'expansion de la couche de mélange est constant. Une bibliographie très complète sur cette question peut être trouvée dans cette publication.

Tous ces auteurs supposent un jet passif sans poussée hydrostatique, monophasique, évoluant dans un milieu calme dont les propriétés physiques restent constantes dans l'espace et le temps.

En résumé, si la zone d'établissement est bien analysée dans le cas d'un jet mécanique par contre celle des panaches convectifs n'a fait l'objet que de quelques études quantitatives [6, 13]. Ces études ne prennent pas en compte les changements de phase éventuels et supposent des gradients extérieurs de pression, de température et d'humidité nuls.

\* Les termes 'jets' et 'panaches' sont souvent interchangeables, cependant le terme 'jet' s'applique de préférence au cas où l'évolution dépend essentiellement de la quantité de mouvement initiale existant dans la section de sortie. Le terme 'panache' s'appliquera à un écoulement libre dépendant essentiellement de la poussée hydrostatique où l'influence de la quantité de mouvement initiale est devenue négligeable.

Le travail présenté est une extension de la méthode de calcul d'Abramovich au cas de l'existence de gradients extérieurs et de changements d'états.

La méthode intégrale déjà développée par les auteurs [14, 15] pour l'étude paramétrique des panaches thermiques, pleinement établis, est utilisée.

### I. MISE EN EQUATION ET ANALYSE DU PROBLEME

Les équations sont écrites dans un système d'axes cylindriques en faisant les hypothèses suivantes :

(1) Le jet, supposé à symétrie axiale, est émis verticalement.

(2) La répartition radiale de la vitesse, au niveau de la section de sortie de la conduite d'amenée, est uniforme.

(3) En tous points du champ aérodynamique, les vitesses sont faibles comparées à la vitesse du son.

(4) A une altitude donnée, les variations de masse volumique suivant  $r$ , sont petites comparées à la masse volumique de l'atmosphère ambiante. Ces variations sont prises en compte dans le terme de poussée hydrostatique (hypothèse de Boussinesq).

(5) En tous points du champ, la pression est supposée répartie hydrostatiquement.

(6) Dans le cas où il y a présence d'une phase liquide, la dimension des gouttelettes d'eau est supposée suffisamment petite pour que leur vitesse puisse être confondue avec celle du panache.

(7) Le régime de l'écoulement est turbulent mais stationnaire en moyenne.

(8) Les tensions visqueuses sont négligeables devant celles d'origine turbulente.

Les notations utilisées sont précisées sur la Fig. 2.

En ne retenant dans les équations écrites ponctuellement que les termes prépondérants, et après avoir moyenné celles-ci dans le temps, on obtient le système suivant :

Equation de continuité

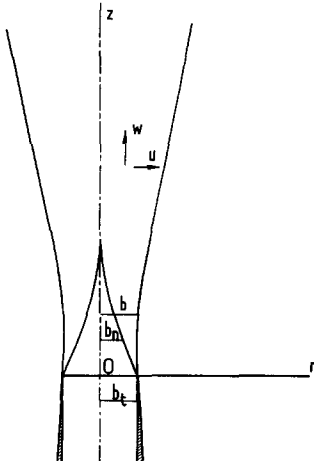


FIG. 2. Système d'axes de référence et notations principales.

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho_1 r w) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho_1 r u) = 0. \quad (1)$$

Equation de quantité de mouvement suivant  $z$  :

$$\rho_1 \frac{\partial}{\partial z}(r w^2) + \rho_1 \frac{\partial}{\partial r}(r u w) = -r \frac{d p_1}{d z} - r \rho g - \frac{\partial}{\partial r}(\overline{r u' w'}). \quad (2)$$

Equation de l'énergie

$$C_p \frac{\partial}{\partial z}(r w T) + C_p \frac{\partial}{\partial r}(r u T) = \mathcal{G}_1 + \mathcal{D}_1 + \mathcal{E}_1 \quad (3)$$

$\mathcal{G}_1$ ,  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{E}_1$  correspondent aux variations d'énergie thermique dues respectivement aux

Changements d'état

$$\mathcal{G}_1 = -r w \frac{\partial \tau_s}{\partial z} L_v - r u \frac{\partial \tau_s}{\partial r} L_v. \quad (3')$$

Phénomènes de détente qui se produisent au cours du mouvement ascensionnel du panache :

$$\mathcal{D}_1 = \frac{R T}{p} \left( r w \frac{\partial p}{\partial z} \right) (1 - \tau) + \frac{R_v T}{e} \left( r w \frac{\partial e}{\partial z} + r u \frac{\partial e}{\partial r} \right). \quad (3'')$$

Transferts turbulents de chaleur

$$\mathcal{E}_1 = -C_p \frac{\partial}{\partial r}(\overline{r u' T'}). \quad (3''')$$

Equation de transfert d'humidité

$$\frac{\partial}{\partial z}(r w \tau) + \frac{\partial}{\partial r}(r u \tau) = - \frac{\partial}{\partial r}(\overline{r u' \tau'}). \quad (4)$$

Equation d'état (avec l'hypothèse 4)

$$\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{\Delta \rho}{\rho_1} \text{ (cf. notations).} \quad (5)$$

Dans ce système de 5 équations figurent 8 inconnues :  $u$ ,  $w$ ,  $T$ ,  $\tau$ ,  $\rho$ ,  $\overline{u' w'}$ ,  $\overline{u' T'}$ ,  $\overline{u' \tau'}$ . Si l'on admet que la turbulence transfère les contaminants passifs, tels que la température, l'humidité, etc., de façon tout à fait comparable à la quantité de mouvement [2], le nombre d'inconnues figurant dans ce système se ramène à 6, une seule équation supplémentaire est alors nécessaire.

Les conditions aux limites sont celles qui règnent à la base et sur l'axe du panache d'une part et à l'infini d'autre part.

Quel que soit  $z$  :

pour  $r = 0$

$$u, \frac{\partial w}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}(\overline{r u' w'}), \frac{\partial}{\partial r}(\overline{r u' \tau'}), \frac{\partial}{\partial r}(\overline{r u' T'})$$

sont nuls

pour  $r \rightarrow \infty$

$$w, \frac{\partial w}{\partial r}, \overline{r u' w'}, \overline{r u' \tau'}, \overline{r u' T'}$$

et leurs dérivées rapport à  $r$  sont nulles.

Ce système peut être résolu soit par une méthode numérique, soit par une méthode intégrale.

Les modèles numériques apparaissent plus généraux mais ils sont considérablement plus coûteux que les autres modèles. Certains auteurs [16] estiment même que 'leurs résultats sont décevants et imprécis dans leur structure actuelle' mais qu'ils peuvent être développés beaucoup plus que les modèles intégraux. Les modèles intégraux, bien que n'assurant pas une connaissance fine de la structure du panache, donnent en général une vision correcte de l'évolution du phénomène et conviennent très bien pour les études paramétriques. En conséquence, la méthode choisie pour résoudre ce système est une méthode intégrale, l'équation de fermeture sera définie ultérieurement.

II. MISE EN OEUVRE DE LA METHODE INTEGRALE

L'expérience montre qu'en général, dans la région initiale, le profil radial universel des différents grandeurs  $X$  a l'allure de celui tracé Fig. 1 [11, 13]. Ce profil peut être représenté en première approximation par une expression de la forme :

$$\frac{X}{X_m} = f(\eta) \tag{6}$$

avec

$$\eta = \frac{r - b_n}{b - b_n} \text{ pour } r \leq b_n \quad f = 1 \tag{7}$$

$$\text{pour } r > b_n \quad f = e^{-\eta^2} \tag{7'}$$

Le choix de  $f(\eta)$  conduit à des résultats en accord avec la réalité physique des phénomènes. Il présente l'avantage de pouvoir retrouver à l'extrémité de la zone d'établissement du jet, pour laquelle  $b_n = 0$ , le profil d'invariance locale déjà utilisé par différents auteurs [15, 17] pour l'étude du développement des jets et panaches dont la turbulence est pleinement établie.

La méthode intégrale ramène le système des équations aux dérivées partielles à un système d'équations différentielles: les 6 inconnues sont les différentes échelles des grandeurs  $\Delta\rho_m, \Delta T_m, \Delta\tau_m, W_m$  et  $b - b_n$ , qui ne sont plus alors que des fonctions de la seule variable  $z$ .

Cependant il est possible de diminuer le nombre des variables en faisant les remarques suivantes :

(1) Dans le noyau  $\tau_m$  et  $T_m$  sont, par hypothèse, indépendants de  $r$ , il en résulte que :

$$\frac{\partial}{\partial r} (\overline{ru'\tau'}) = \frac{\partial}{\partial r} (\overline{ru'T'}) = 0$$

\* Les expressions développées pour décrire l'entraînement sont aussi nombreuses que celles utilisées pour déterminer les coefficients de transferts turbulents. Certains auteurs [19, 20] ont signalé les faiblesses, voire les contradictions [21] auxquelles l'utilisation sans discernement de ce concept conduit.

- (i) l'équation (4) se simplifie alors et donne  $\tau_m = \text{cte.}$
- (ii) l'équation de l'énergie (3) entraîne que  $T_m$  varie suivant une loi adiabatique ou pseudo-adiabatique dont l'expression est donnée plus loin.

(2) Connaissant  $T_m, \rho_m$  est donné par l'équation (5).

Le nombre d'inconnues du système différentiel se réduit alors à 3 :  $w_m, b$  et  $b_n$  pour les 3 équations intégrées (1)-(3). Cependant, l'intégration en  $r$  de 0 à l'infini de l'équation de continuité (1) introduit une fonction inconnue supplémentaire  $\lim_{r \rightarrow \infty} (-ru)$  qui définit l'entraînement.\* Il apparait donc nécessaire de formuler une hypothèse supplémentaire. En accord avec les travaux antérieurs [6, 1], celle-ci portera sur le taux de croissance de la couche de mélange, c'est-à-dire sur  $b - b_n$ .

La théorie de la longueur de mélange de Prandtl et l'hypothèse d'invariance locale conduit à une expression de  $b - b_n$ , en fonction de  $z$ , de la forme :

$$b - b_n = \Lambda z \tag{8}$$

où  $\Lambda$  est un coefficient, sans dimension, fixant l'échelle des longueurs de la turbulence. Cette dernière relation, jointe à l'équation de la quantité de mouvement suivant  $z$  (2) et à celle de l'énergie (3) assure la fermeture du système intégré.

Equation de la quantité de mouvement suivant  $z$

L'équation (2), compte tenu des hypothèses et de la forme du profil d'invariance locale (7) et (7') s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} (rw_m^2 f^2) + \frac{\partial}{\partial r} (rw_m f u) \\ = rg \frac{\Delta T_m}{T_1} f - \frac{\partial}{\partial r} (\overline{ru'w'}) \end{aligned}$$

A une altitude donnée, cette équation est intégrée, suivant  $r$ , de 0 à l'infini. Par suite de la définition de  $f$ , le domaine d'intégration doit être décomposé en deux domaines partiels :  $[0, b_n]$  et  $]b_n, \infty[$ .

(La borne  $b_n$  dépendant de  $z$ , l'opérateur  $\partial/\partial z$  peut être mis à l'extérieur du signe  $\int$  à condition d'utiliser la formule de Liebnitz.) Cette intégration ne présente aucune difficulté, elle conduit à :

$$\begin{aligned} 1 \frac{d}{dz} \left\{ w_m^2 [2b_n^2 + (b - b_n)^2 + b_n(b - b_n)\sqrt{2\pi}] \right\} \\ 2 \frac{d}{dz} \left\{ g \frac{\Delta T_m}{T_1} [b_n^2 + (b - b_n)^2 + b_n(b - b_n)\sqrt{\pi}] \right\} \end{aligned} \tag{9}$$

Equation de l'énergie

Les différents termes du membre de gauche de l'équation (3) se décomposent chacun en deux, l'un relatif à la phase liquide, l'autre à l'air humide :

$$\begin{aligned} (1 - \tau_c) C_p \left[ \frac{\partial}{\partial z} (rwT) + \frac{\partial}{\partial r} (ruT) \right] \\ + \tau_c C \left[ \frac{\partial}{\partial z} (rwT) + \frac{\partial}{\partial r} (ruT) \right] = \mathcal{E}_1 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{E}_2 \end{aligned}$$

On peut, en première approximation, négliger  $\tau_c C$

devant  $(1 - \tau_c) C_p$  et  $\tau_c$  devant 1. Dans ces conditions l'équation de l'énergie se réduit à :

$$C_p \frac{\partial}{\partial z} (rwT) + C_p \frac{\partial}{\partial r} (ruT) = \mathcal{C}_1 + \mathcal{D}_1 + \mathcal{E}_1.$$

Avant d'intégrer cette équation, il est nécessaire de faire apparaître l'échelle des températures  $\Delta T_m$  et de grouper les termes de condensation (3') et de détente (3'') de la vapeur d'eau.

Pour cela  $T$  est remplacé par  $\Delta T_m f + T_1$ .

Le groupement de ces termes conduit à considérer l'expression tirée de  $\mathcal{C}_1 + \mathcal{D}_1$  :

$$rw \frac{R_v T}{e} \frac{\partial e}{\partial z} + ru \frac{R_v T}{e} \frac{\partial e}{\partial r} - L_v \left( rw \frac{\partial \tau_s}{\partial z} + ru \frac{\partial \tau_s}{\partial r} \right).$$

On sait que :

$$\tau_s = \frac{R_a}{R_v} \frac{e_w}{(p - e_w)}.$$

Or, dans les conditions de l'étude,  $e_w/p < 0,03$  est négligeable devant 1, d'où  $\tau_s \simeq (R_a/R_v) (e_w/p)$ . Par ailleurs, la formule de Clapeyron  $L_v = R_v T^2 (1/e_w) (de_w/dT)$  permet d'exprimer  $L_v$  en fonction de  $e_w$  et de  $T$ ; en posant :

$$dJ = -T \left[ rw \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{L_v \tau_s}{T} \right) + ru \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{L_v \tau_s}{T} \right) \right] \quad (10)$$

l'expression ponctuelle de l'équation de l'énergie s'écrit :

$$\begin{aligned} C_p \left[ \frac{\partial}{\partial z} (rw_m \Delta T_m f^2) + \frac{\partial}{\partial r} (ru \Delta T_m f) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} (rw T_1) + \frac{\partial}{\partial r} (ru T_1) \right] \\ = -C_p \frac{\partial}{\partial r} (\overline{ru'T'}) + \frac{rw}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial z} - dJ. \end{aligned} \quad (11)$$

Cette expression présente l'avantage d'être valable qu'il y ait ou non changement de phase; en effet, dans ce dernier cas  $J = dJ = 0$ .

S'il n'y a pas de changements de phase, cette équation s'intègre de façon similaire à celle de la quantité de mouvement suivant  $z$  et donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \{ [2b_n^2 + (b - b_n)^2 + b_n(b - b_n)\sqrt{(2\pi)}] w_m \Delta T_m \} \\ - K w_m [b_n^2 + (b - b_n)^2 + b_n(b - b_n)\sqrt{\pi}] = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

avec

$$K = \left( \frac{dT}{dz} \right)_{ad} - \frac{dT_1}{dz}.$$

Calcul de  $J$

Il est intéressant de remarquer que  $e_w$  étant une fonction de la température, le groupement  $L_v \tau_s / T$ , qui apparaît dans l'équation (10), peut s'exprimer sous la forme :

$$\frac{L_v \tau_s}{T} = \frac{F(t)}{p_1(z)} \quad \text{avec } t = T - 273$$

il en résulte que :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{L_v \tau_s}{T} \right) = \frac{1}{p_1} \frac{dF}{dT} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{F}{p_1^2} \frac{\partial p_1}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{L_v \tau_s}{T} \right) = \frac{1}{p_1} \frac{dF}{dT} \frac{\partial T}{\partial r}.$$

En reportant dans (11) et après avoir regroupé les termes, on obtient pour le membre de droite de (12) :

$$\begin{aligned} - \frac{\partial}{\partial r} (\overline{ru'T'}) - rwg + \frac{T}{C_p p_1} \frac{dF}{dT} \frac{\partial}{\partial r} (\overline{ru'T'}) \\ 1 + \frac{T}{C_p p_1} \frac{dF}{dT} \\ (I) \\ + rw \frac{g}{C_p^2} \frac{T}{p_1} \frac{dF}{dT} + \frac{T}{C_p} \frac{F}{p_1^2} \frac{dp_1}{dz} \\ 1 + \frac{T}{C_p p_1} \frac{dF}{dT} \\ (II) \end{aligned}$$

Dans le cas d'un changement d'état, l'intégration des termes (I) et (II) est effectuée dans le domaine de variations de  $\eta$  où  $\tau > \tau_s$ . Ce domaine est défini par les racines  $T_{v1}$ ,  $T_{v2}$  de l'équation :

$$\tau = \tau_s. \quad (13)$$

Les différents cas qui peuvent se produire sont donnés Fig. 3.

Par suite de la définition du noyau, les termes de corrélation (I) n'interviennent que dans la couche de mélange. Une estimation de leur ordre de grandeur montre que la valeur maximale de ces termes est obtenue au voisinage de la sortie et qu'elle est alors comparable à celle du terme (II).

Cependant, la valeur absolue de leur intégrale est faible, puisque le domaine d'intégration est lui-même petit en particulier dans le cas C (Fig. 3) où le terme II est intégré de 0 à l'infini. Enfin, ce terme de corrélation est une fonction rapidement décroissante de l'altitude, il peut être négligé devant le terme II dès que l'on s'éloigne de la sortie; en conséquence, nous n'avons retenu, dans ce calcul, que le terme II.

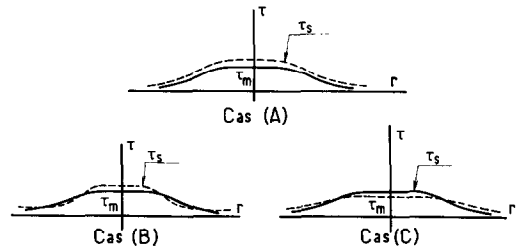


FIG. 3. Différents cas de calcul de la condensation. (A) pas de condensation; (B) condensation en couronne; (C) condensation en bloc.

III. APPLICATION NUMÉRIQUE

Après intégration suivant  $\eta$ , le système à résoudre s'écrit donc :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dz} (Aw_m^2) = g \frac{\Delta T_m}{T_1} F \quad (14)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dz} (Aw_m \Delta T_m) - Kw_m F = J_C + J_N \quad (15)$$

$$\frac{d}{dz} \Delta T_m = K - 2 \frac{J_N}{b_n^2 w_m} \quad (16)$$

avec

$$A = 2b_n^2 + (b - b_n)^2 + b_n(b - b_n)\sqrt{2\pi}$$

$$F = b_n^2 + (b - b_n) + b_n(b - b_n)\sqrt{\pi}$$

$$b - b_n = \Lambda z$$

pour  $\tau_m < \tau_s$  (Fig. 3)

$$J_C = 2w_m(b - b_n) \int_{\eta_{v1}}^{\eta_{v2}} \frac{T \frac{g}{C_p} F_5 + \frac{T F_1}{p_1} \frac{dp_1}{dz}}{\frac{C_p}{\beta_1} + \frac{T}{p_1} F_5} \times [\eta(b - b_n) + b_n] e^{-\eta^2} d\eta \quad (17)$$

avec  $T = T_1 + \Delta T_m e^{-\eta^2}$ ,  $\beta_1 = 380 R_A$

pour  $\tau_m > \tau_s$ :

$$J = J_N + J_C \text{ avec } J_N = \frac{b_n^2 w_m T_m}{p} \times \frac{\frac{g}{C_p} F_5(t_m) + \frac{T_m F_1(t_m)}{p_1} \frac{dp_1}{dz}}{\frac{C_p}{\beta_1} + \frac{T_m}{p_1} F_5(t_m)} \quad (17')$$

Le calcul se ramène à l'intégration numérique du système (14)-(16), et dans le cas où il y a condensation des bornes d'intégration  $\eta_{v1}$ ,  $\eta_{v2}$ . L'expression de  $\tau_s$  utilisée est celle proposée dans la référence [14]:

$$\tau_s = \frac{380}{p} \frac{at^2 + bt + 1}{ct + 1} \quad (18)$$

Les valeurs des constantes  $a, b, c$  sont données dans le tableau ci-dessous :

	$t \leq 0$	$t > 0$
$a$	$4,8865 \times 10^{-4}$	$1,7318 \times 10^{-3}$
$b$	$4,3531 \times 10^{-2}$	$5,8307 \times 10^{-2}$
$c$	$-4,3550 \times 10^{-2}$	$-1,2672 \times 10^{-2}$

L'équation (13) s'écrit alors:

$$\left[ c \frac{\Delta \tau_m}{\Delta T_m} - \frac{380}{p_1} a \right] t^2 + \left[ \frac{\Delta \tau_m}{\Delta T_m} (1 - ct_1) - \frac{380b}{p_1} + ct_1 \right] t - \frac{\Delta \tau_m}{\Delta T_m} t_1 + \tau_1 - \frac{380}{p_1} = 0. \quad (19)$$

Les racines éventuelles de (19) et leur position par rapport à  $T_1 = t_1 + 273$  et  $T_m = T_1 + \Delta T_m$  donnent les limites radiales  $\eta_{v1}$ ,  $\eta_{v2}$  du panache visible

$$\eta_{v1,2} = \left( \log \frac{\Delta T_m}{T_{1,2} - T_1} \right)^{1,2} \quad (\Delta T_m \neq 0).$$

Avec la relation (18) on obtient pour les fonctions  $F_1$  et  $F_5$  qui apparaissent dans (18) et (17)

$$F_1(t) = \frac{act^2 + 2at + b - c}{(ct + 1)^2}$$

$$F_5(t) = \frac{1}{(ct + 1)^2} \times \left[ act^2 + 2at + b - c + \frac{2(c^2 - bc + a)(t + 273)}{ct + 1} \right].$$

Le détail du calcul de ces fonctions est donné [14].

Les applications numériques ont été effectuées, dans le cas des panaches avec et sans condensation, par intégration numérique du système (14)-(16) sur ordinateur.

Le calcul du panache établi, à l'extrémité de la zone d'établissement (Fig. 1), est alors fait à l'aide du programme de calcul mis au point précédemment.

La validité de la méthode a d'abord été testée à l'aide des résultats expérimentaux de Pryputniewicz [22] pour ses conditions d'essais; (Panaches thermiques sans condensation émis dans une atmosphère où les conditions extérieures sont constantes).

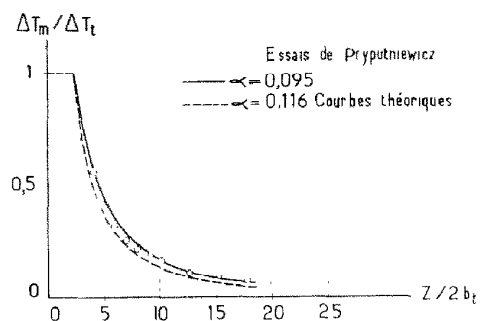
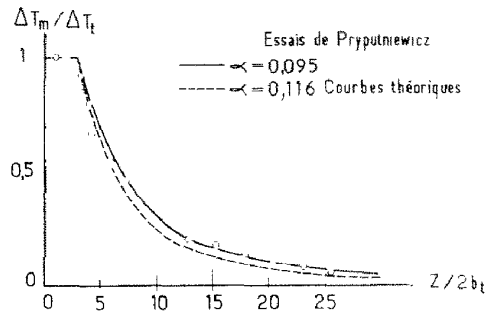


FIG. 4. Validité de la méthode par comparaison avec des résultats expérimentaux. (a)  $\Lambda = 0,16$ ,  $2b_t = 0,28$  m,  $W_T = 1 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\Delta T_T = 27^\circ\text{C}$ ,  $F = 4$ ; (b)  $\Lambda = 0,19$ ,  $2b_t = 1,08$  m,  $W_T = 1 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\Delta T_T = 27^\circ\text{C}$ ,  $F = 1$

La comparaison a été faite pour deux nombres de Froude\* (Figs. 4). Le nombre de Froude est défini par

$$F = \frac{W_T^2}{2gb_T \frac{\Delta T_T}{T_T}}$$

Elle montre que la longueur du noyau est correctement prédite et que le coefficient d'entraînement qui convient le mieux pour le développement du panache établi est  $\alpha = 0,095$ .

La méthode de calcul de la zone d'établissement d'un panache condensé a été également utilisée pour déterminer les conditions initiales du panache établi (Fig. 6) dans le cas d'une situation météorologique

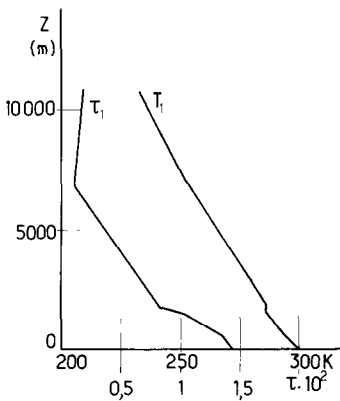


FIG. 5. Situation météorologique du 9 avril 1975 (12 HTU) à Nîmes.

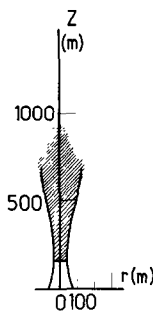


FIG. 8. Panache visible calculé et comparaison avec un panache réel (site de John-Amos:  $P_u \sim 2000$  MW,  $b_T = 40$  m,  $\Delta T_T = 25,6^\circ\text{C}$ ,  $\tau_{m_T} = 3 \times 10^{-2}$ ,  $W_T = 5$  m s $^{-1}$ ). (Les hachures correspondent au panache visible observé; le trait plein indique la frontière visible du panache, calculé par le présent modèle.)

\* Le nombre de Froude n'est pas suffisant pour caractériser seul l'évolution des différentes grandeurs au niveau de l'axe du panache car il ne tient pas compte des phénomènes de détente; ceux-ci se manifestent d'autant plus que la largeur initiale du panache est grande. Il faut signaler que les dimensions des maquettes utilisées par Pryputniewicz sont suffisamment petites pour que ces phénomènes soient négligeables au cours de ces expériences.

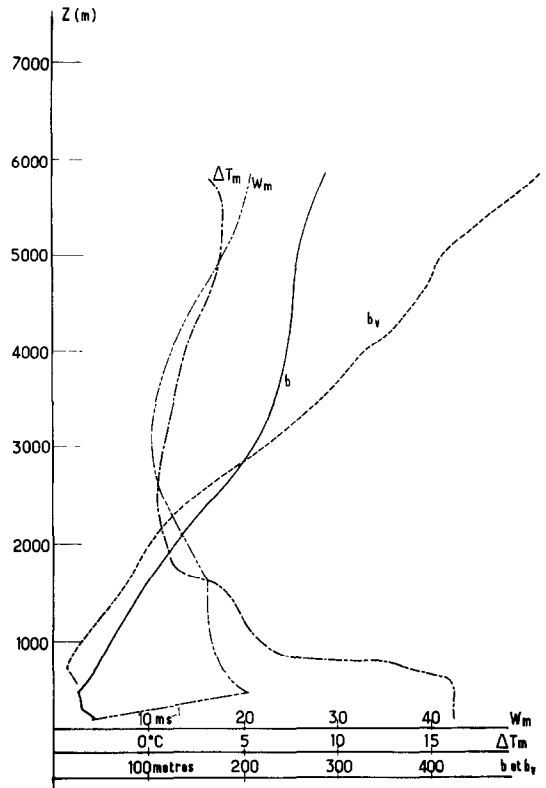


FIG. 6. Evolution des grandeurs caractéristiques du panache en fonction de l'altitude. Tour humide:  $P_u \sim 8000$  MW,  $b_T = 88,7$  m,  $\Delta T_T = 16,3^\circ\text{C}$ ,  $\tau_{m_T} = 3,939 \times 10^{-2}$ ,  $W_T = 4$  m s $^{-1}$ .

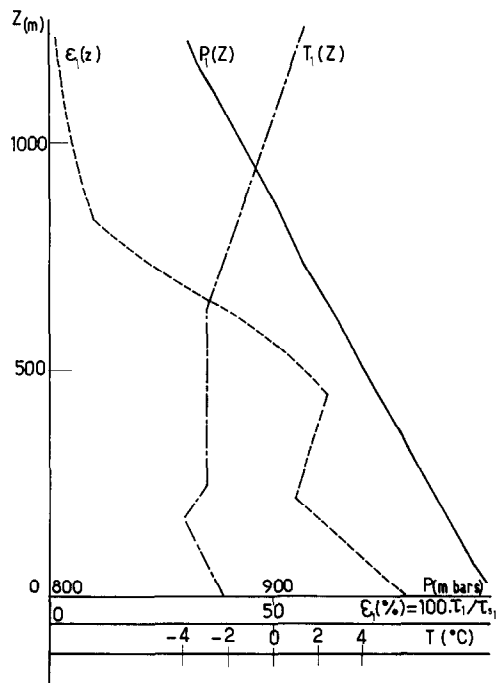


FIG. 7. Situation météorologique du site de John-Amos.

réelle (Fig. 5).

Enfin, la Fig. 7 correspond à l'application de cette méthode à un cas connu (site de John-Amos [23]). Ce cas présente une inversion de température (Fig. 8) qui conduit à un blocage du panache.

**Remerciements**—Les auteurs tiennent à exprimer toute leur gratitude à Monsieur le Professeur Bernard, Directeur du Laboratoire d'Aérothermique de Meudon, pour l'intérêt constant et les conseils avisés dont il les a toujours fait bénéficier pour ces recherches.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. H. Tennekes and J. L. Lumley, *A First Course in Turbulence*, 3ème éd. The MIT Press, Cambridge (1972).
2. J. O. Hinze, *Turbulence*. McGraw-Hill, New York (1959).
3. W. Schmidt, Turbulente ausbreitung eines stromes erhitzter luft, *Z. Angew. Math. Mech.* **21-6**, 351-363 (1941).
4. S. I. PAI, *Viscous Flow Theory. II. Turbulent Flow*. D. Van Nostrand, Princeton (1957).
5. A. Kuethé, Investigation of the turbulent mixing regions formed by jets, *J. Appl. Mech.* **2**, 3, A87-95 (1935).
6. G. N. Abramovich, *The Theory of Turbulent Jets*. The M.I.T. Press, Cambridge, (1963).
7. W. Forstall and A. M. Shapiro, *J. Appl. Mech.* **17**, 399-405 (1950).
8. S. Corrsin and M. S. Uberoi, NACA Tech. Notes 1865 (1949).
9. P.O.A.L. Davies, M. J. Fisher and M. J. Barratt, The characteristics of the turbulence in the mixing region of a round jet, *J. Fluid Mech.* **15**, 338-367 (1963).
10. L. J. S. Bradbury, The structure of a self preserving turbulent plane jet, *J. Fluid Mech.* **23**, 31-64 (1965).
11. S. Sami, T. Carmody and M. Rouse, Jet diffusion in the region of flow establishment, *J. Fluid Mech.* **27**, 231-252 (1967).
12. H. H. Minh et P. Chassaing, Restructuration d'écoulements turbulents. *J. Mécanique* **17**, No. 3, 359-386 (1978).
13. C. J. Chen and C. P. Nikitopoulos, On the near field characteristics of axisymmetric turbulent buoyant jets in a uniform environment, *Int. J. Heat Mass Transfer* **22**, 245-255 (1979).
14. X. Garonne, R. Guillaume, A. Papon et G. Salaun-Penquer, Sur une nouvelle méthode de calcul de l'influence de la condensation sur le développement des panaches thermiques, *Int. J. Heat Mass Transfer* **22**, 21-26 (1979).
15. G. Salaun-Penquer, X. Garonne, R. Guillaume et A. Papon, Puissances thermiques critiques, lors de la pénétration dans l'atmosphère, des panaches avec ou sans giration, *Int. J. Heat Mass Transfer* **23**, 37-47 (1980).
16. L. R. Davis et M. A. Shirazi, Révue des modèles de panaches thermiques, 6ème Congrès International sur le transfert de chaleur, Toronto, Canada, (7-11 Août 1978).
17. B. R. Morton, J. S. Turner and G. I. Taylor, Turbulent gravitationnal convection from maintained and instantaneous sources, *Proc. R. Soc.* **230 A**, 1-23 (1956).
18. S. Lin Lee, Axisymmetrical turbulent swirling jet, *J. Appl. Mech.* **32**, 258-262 (1965).
19. S. C. Crow and F. M. Champagne, Orderly structure in jet turbulence, *J. Fluid Mech.* **48**, 547-591 (1971).
20. M. I. O. Ero, Buoyant plume rise in atmospheric inversions, *Int. J. Heat Mass Transfer* **20**, 403-407 (1977).
21. N. E. Kotsovinos and E. J. List, Plane turbulent buoyant jets, *J. Fluid Mech.* **81**, 25-62 (1978).
22. R. J. Pryputniewicz, An experimental study of the free surface effects and submerged vertical buoyant jet, M.S. Thesis, University of Connecticut (1974).
23. L. Caudron et P. L. Violet, Méthode et moyen d'études des panaches d'effluents rejetés dans l'atmosphère, *Bull. Dir. Etud. Rech., Série A*, **4** (1975).

#### APPLICATION OF THE INTEGRAL METHOD TO INVESTIGATE THE ZONE OF FLOW ESTABLISHMENT OF PLUME

**Abstract** — An integral model based on previous studies of the authors [15] is used to investigate the zone of flow establishment of plume. The case of condensated plume is also calculated. The experimental data of Pryputniewicz [22] used to check the validity of the method show a good agreement. For real atmospheric conditions (John-Amos) the model give the evolution of characteristics parameters of condensated plumes; the calculated field stops slightly beneath the spread.

#### ANWENDUNG DER INTEGRALMETHODE ZUR UNTERSUCHUNG DER AUSBREITUNGSZONE EINES SCHWADENS

**Zusammenfassung** — Ein Integralmodell — bereits früher von den Autoren [15] entwickelt — wurde für die Untersuchung der Ausbreitungszone von Schwaden erweitert, wobei dieses Modell die Behandlung kondensierter Schwaden ebenfalls erlaubt. Als Gültigkeitsnachweis der Hypothesen wurden experimentelle Daten von Pryputniewicz [22] herangezogen, die eine gute Übereinstimmung zeigen. Anschließend fand die Methode Anwendung auf die Berechnung kondensierter Schwaden bei realen meteorologischen Bedingungen (John-Amos-Fall). Der berechnete Bereich endet knapp unterhalb der Schwadenauflösung.

#### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО МЕТОДА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗОНЫ УСТАНОВИВШЕГОСЯ СВОБОДНОКОНВЕКТИВНОГО ПОДЪЕМНОГО ТЕЧЕНИЯ

**Аннотация** — Для исследования зоны установившегося свободноконвективного течения используется интегральная модель, ранее разработанная авторами. Выполнен также расчет для случая уплотненных струек. Справедливость метода проверена на экспериментальных данных, взятых из работы [22], и получено хорошее совпадение результатов. С помощью предложенной модели рассчитано развитие характеристических параметров уплотненных свободноконвективных струек в реальных атмосферных условиях.